Dr. M. Bier (bier@is.mpg.de)
M.Sc. H. Bartsch

Physik der Flüssigkeiten I **WiSe 2017/18**

8. Übungsblatt (`http://www.is.mpg.de/dietrich/lehre/PdF`) **6. Februar 2018**

19. *Freie Grenzfläche im Ginzburg-Landau-Modell*

Betrachten Sie das in Kapitel 5.3 eingeführte Ginzburg-Landau-Modell

$$\beta\Omega[\varrho] = -\beta p_\mathrm{c}|\mathcal{V}| + \int\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^d r \left(\frac{\beta a \tau}{2} \left(\varrho(\mathbf{r}) - \varrho_\mathrm{c}\right)^2 + \frac{\beta b}{4} \left(\varrho(\mathbf{r}) - \varrho_\mathrm{c}\right)^4 + \frac{\beta c}{2} \left(\nabla \varrho(\mathbf{r})\right)^2 + \varrho(\mathbf{r}) \left(\beta V(\mathbf{r}) - \beta(\mu - \mu_\mathrm{c})\right) \right) \tag{1}$$

mit $a, b, c > 0$ und $\tau = \dfrac{T - T_\mathrm{c}}{T_\mathrm{c}}$. In §5.3.2 wurde gezeigt, dass im homogenen System für $\tau < 0, \mu = \mu_\mathrm{c}$ Koexistenz zwischen einem Fluid F_1 ("Flüssigkeit") der Dichte $\varrho_1 = \varrho_\mathrm{c} + \sqrt{-\dfrac{a\tau}{b}}$ und einem Fluid F_2 ("Gas") der Dichte $\varrho_2 = \varrho_\mathrm{c} - \sqrt{-\dfrac{a\tau}{b}}$ herrscht, und dass dann der Druck durch $p = p_\mathrm{c} + \dfrac{a^2\tau^2}{4b}$ gegeben ist. Im Folgenden soll nun für $\tau < 0, \mu = \mu_\mathrm{c}, V(\mathbf{r}) = 0$ die Struktur $\varrho(\mathbf{r}) = \varrho(z)$ einer ebenen freien Grenzfläche zwischen F_1 und F_2 untersucht werden.

(a) Leiten Sie die Euler-Langrange-Gleichung für $\varrho(z)$ her.

(b) Zeigen Sie, dass die Euler-Langrange-Gleichung Lösungen der Form

$$\varrho(z) = \varrho_\mathrm{c} + K \tanh\left(\frac{z - z_0}{\ell}\right) \tag{2}$$

besitzt, und drücken Sie die Konstanten $K, \ell \in \mathbb{R}, \ell > 0$, durch die Dichten ϱ_1, ϱ_2 und die Korrelationslänge $\xi = \sqrt{-\dfrac{c}{2a\tau}}$ (siehe §5.3.3) aus.

(c) Skizzieren Sie $\varrho(z)$.

(d) Bestimmen Sie die Grenzflächenspannung $\gamma(\tau)$, drücken Sie sie durch die Dichtedifferenz $\varrho_1 - \varrho_2$, die Korrelationslänge ξ und die isotherme Kompressibilität $\kappa_T = -1/(2\varrho_\mathrm{c}^2 a\tau)$ (siehe §5.3.2) aus, und diskutieren ihre Abhängigkeit von diesen Größen. Wie verhält sich $\gamma(\tau)$ bei Annäherung an den kritischen Punkt ($\tau \to 0^-$)?